

MNU



Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

DER MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE UNTERRICHT



Organ des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V.

Schriftleitung:

Hauptschriftleitung
und Mathematik: OStD a. D. H. NOACK, 23 Kiel, Feldstr. 108
Physik: Dipl.-Phys. Dr. HANS-JOSEF MÜRTZ
5473 Kruft über Andernach, Postfach 27
Chemie: StD OTTHEINRICH DÜLL
675 Kaiserslautern, Breidenbornerstr. 8
Biologie: Prof. Dr. KARL-HEINZ BERCK
638 Bad Homburg, Landgrafenstr. 66

Verlag:

FERD. DÜMMLER'S VERLAG, 53 Bonn 1, Postfach 297; Kaiser-
straße 31–37 (Dümmlerhaus). Telefon 02221/63 12 31 und
HIRSCHGRABEN-VERLAG GmbH, 6 Frankfurt am Main,
Fürstenbergerstr. 223

Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Ver-
lage (federführend ist Dümmler, Bonn)

Anzeigen- und Beilagenverwaltung:

durch den federführenden Verlag:
FERD. DÜMMLER'S VERLAG, 53 BONN 1, Postfach 297;
Kaiserstraße 31–37 (Dümmlerhaus). Telefon 02221/63 12 31

Anzeigen- und Beilagenpreise gemäß Tarif Nr. 15 vom 1. 7. 1973.
Für Stellengesuche und Behördenanzeigen gilt ein vergünstigter
Tarif. Anzeigenschluß jeweils 3 Wochen vor Erscheinen.

Erscheinungsweise:

8 mal jährlich mit je 64 Seiten Umfang: Zum 15. Jan./1. März/
15. April/1. Juni/15. Juli/1. Sept./15. Okt./1. Dez.

Bezugsbedingungen:

Pro Jahrgang 8 Hefte = 512 Seiten plus 8 Seiten Jahresinhalts-
verzeichnis: DM 44,— (ab Jahrgang 27 DM 48,—), Einzel-
heft DM 6,50 (ab Jahrgang 27 DM 7,—), zuzüglich Ver-
sandspesen. Hefte früherer Jahrgänge zu gleichem Preis teil-
weise noch lieferbar.

Vorzugspreis für Studenten gegen Studienbescheinigung
DM 35,20 (ab Jahrgang 27 DM 38,40), zuzüglich Versand-
spesen (nur direkt vom Verlag).

Einbanddecken: auch früherer Jahrgänge jeweils DM 4,80.
Eine Kündigung des Jahresabonnements kann nur anerkannt
werden, falls die Kündigung mindestens 6 Wochen vor Jahres-
ende beim Verlag vorliegt.

Anschriftenänderungen bitte selbst durch »Antrag auf
Anschriftenänderung« (amtliches Formblatt der Post) an die
Zeitungsabsatzstelle des alten Postamtes melden. Beschwer-
den über unregelmäßige Zustellung der Zeitschrift nur beim
örtlich zuständigen Zeitungspostamt, nicht beim Verlag oder
dem MNU-Geschäftsführer.

Besprechungsstücke: nur an die zuständigen Fachschrift-
leiter. Für unverlangte Sendungen besteht keine Verpflichtung
zur Rezension bzw. zur Erwähnung noch wird eine Haftung
oder Rücksendungsverpflichtung übernommen. **Namentlich** ge-
kennzeichnete Beiträge geben nicht unbedingt in jedem Falle
die Meinung der Schriftleitung und des Verlages wieder.

DEUTSCHER VEREIN ZUR FÖRDERUNG DES MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHTS E. V.

Der Verein ist durch Verfügung des Finanzamtes für Körperschaften in Hamburg als gemeinnützig anerkannt.

Ehrenvorsitzender: OStD Prof. Dr. FR. MUTSCHELLER, 75
Karlsruhe-1, Damaschkestr. 46
1. Vorsitzender: OStD Dr. E. BAURMANN, 75 Karls-
ruhe-51, Märchenring 11
2. Vorsitzender: StD K. REEB, 28 Bremen, Rabling-
hauser Landstraße 70
Geschäftsführer: StD FRIEDR. BECKER, 2 Hamburg
50, Bielfeldstr. 14, Postscheckkonto:
Deutscher Verein zur Förderung des
mathematischen und naturwissen-
schaftlichen Unterrichts, Hamburg
43919-202

Beisitzer: Prof. Dr. K. SEEBACH, 8 München 38,
Walhallastr. 5 (Mathematik)
OStD A. KLEIN, 5 Köln 91, Stachels-
weg 28 (Physik)
StD H. WAGNER, 5401 Kaltenen-
gers, Kirchstr. 2 (Chemie)
StD Dr. E. SCHLABRITZKY, 6601 Blies-
mengen-Bölschen, Eschinger Str. 35
(Biologie)
OStD a. D. H. NOACK, 23 Kiel, Feld-
str. 108
StR D. POHLMANN, 22 Elmshorn,
Ollnsstraße 127 (Information)

Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr. Der Eintritt kann
jederzeit erfolgen. Der Beginn der Mitgliedschaft rechnet
je nach Wunsch des Eintretenden vom 1. Januar oder 1.
Juli an. Der Austritt ist nur zum 31. Dezember möglich und
muß bis zum 1. Dezember dem Geschäftsführer gemeldet
werden. Schulen und Hochschul institute können nicht Mit-
glied werden.

Der Jahresbeitrag beträgt 36,— (für Pensionäre DM
30,—); in ihm ist die kostenfreie Belieferung mit der Zeit-
schrift »Der mathematische und naturwissenschaftliche
Unterricht« eingeschlossen. Studenten und Studienreferen-
dare, Assessoren, Hochschulassistenten und Junglehrer, die
noch nicht die volle tarifliche Besoldung erhalten, bezahlen

nur DM 22,— Jahresbeitrag, wenn sie darüber eine mit
dem Stempel der Schulleitung oder der Hochschule ver-
sehene Bescheinigung dem Geschäftsführer einreichen.

Der Jahresbeitrag kann im ganzen oder in Halbjahres-
raten gezahlt werden. Ist der Halbjahresbeitrag bis zum
1. Juni oder 1. November nicht bezahlt, so wird er durch
Postnachnahme zuzüglich der Einzugskosten erhoben.

An- und Abmeldung sowie Anschriftenänderungen sind
ausschließlich an den Geschäftsführer und nicht an die
Verlage zu richten. Beschwerden über unregelmäßige Zu-
stellung der Zeitschrift reiche man beim zuständigen Zeit-
ungspostamt ein; erst wenn sie erfolglos bleiben, wende
man sich an den Geschäftsführer.

INHALTSVERZEICHNIS

ABHANDLUNGEN

Mathematik

ARBEITSKREIS EDV IN DER SCHULE: Kleincomputer für die Schule (Teil 2)	79
BECKER-BENDER, G. – KMIETSCH, U.: Die mathematische Theorie der Spiele	457
DENNEBERG, D.: Elementare Behandlung der Ziffersysteme und der Restklassenringe \mathbb{Z}_n in der Schule.	424
EGGS, H.: Kleinrechner für die Schule	227
FERSCHL, F.: Rationales Verhalten bei Unsicherheit.	219
FRITSCH, R.: Kategorien, Funktoren, natürliche Transformationen	65, 243
GREGER, K.: Einige mathematische Modelle biologischen Wachstums	279
HERING, H.: Ein Fixpunktsatz für endliche Mengen	8
– Zur Mathematisierung des »Turm von Hanoi«-Spiels	408
HOHLER, P.: Über pseudomagische Quadrate dritter Ordnung	14
HÜRTEN, K. H.: Didaktische Analyse des Satzes von Stone.	284
KLINGEN, L.: Der Stellenwert von Abnehmerbefragungen für das Curriculum der Mathematik in der reformierten gymnasialen Oberstufe.	129
KORNHUBER, R.: Vereinfachung eines Computermodells	176
KOSSWIG, FR. W.: Der Satz von Bayes als Anwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten	419, 507
KRAUSKOPF, R.: Erarbeitung der Graphen von Sinus- und Cosinusfunktion aus vorgegebenen Funktionaleigenschaften	10
MÜLLER, G.: Das Lösen von Bestimmungsgleichungen	87
NESS, W.: Zur Theorie der ebenen Punktgitter	17
PADBERG, F.: Über Assoziativität und Kommutativität bei Gruppoiden	174
REIN, H. J.: Ein Iterationsverfahren dritter Ordnung zur numerischen Berechnung der n -ten Wurzel	343
SCHLIER, CH.: Computer in die Schule – aber wie?	321
SCHNEIDER, H.: Lösungen »falscher« Gleichungen	233
SCHUPP, H.: Extremale Abstandssumme im Dreieck	19
SCHWARZE, J.: Elastizitäten von Funktionen	345
STARK, J.: Zur Festlegung der Multiplikation in \mathbb{C}	142
STELLER, E.: Zwei Beispiele aus dem Mathematikunterricht an den Europäischen Schulen.	143
STREB, W.: Spatinhalte im 2- und 3-dimensionalen metrischen Raum als Beispiele für Funktionsbestimmungen auf Grund von Funktionseigenschaften.	352

WAGENSCHN, M.: Der Vorrang des Verstehens: Pädagogische Anmerkungen zum mathematisierenden Unterricht	385, 507
WALTHER, G.: Zur Axiomatik der natürlichen Zahlen	265
WEIDIG, I.: Zahlbereichserweiterungen in didaktischer Sicht	482
WIEDEMER, G.: Multiplizierwerk nach der russischen Bauernmethode aus SIMULOG-Bausteinen	486

Physik

BERGE, O. E.: Zur Frage der Energiebilanz bei der Parallelschaltung von Kondensatoren	242
DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT: Empfehlungen zur Neustrukturierung des Physikstudiums an den deutschen Hochschulen.	118
FEDDERS, R. – LUDWIG, G.: Elektronische Lichtgeschwindigkeitsmessung	21
FEUERLEIN, R.: Programmierter Physikunterricht	332
GÖTZ, R. – GANTER, M.: Einige Ergebnisse des Freiburger Schulversuchs Physik. Ein Beitrag zur Evaluierung des Curriculums Physik vom IPN Kiel	393
GRONEMEIER, K. H. – HAAG, H.: Resonanzerscheinungen in der Physik	25
HERMANN, G. – SCHAARMANN, A. – SCHNAAS, N.: Demonstrationsexperimente zur Festkörperphysik mit einer Torsionspendelkette	291
HOFFMANN, G. – LANGE, H.: Die Messung der Avogadro-Konstanten mit Latexteilchen	430
KÖHLER, R.: Leistungsanpassung und Widerstandstransformation	98
KRESS, K.: Digitale Elektronik: Ihre experimentelle Behandlung unter Verwendung der LOGITRON-Bausteine	155
– Digitale Elektronik: Ihre experimentelle Behandlung unter Verwendung der LOGITRON-Bausteine im Physikunterricht der Sekundarstufe II	488
KUHN, W.: Kopernikus – ein Revolutionär?	449
KUHN, W. – SCHWARZ, G.: Eine experimentelle Anordnung zur Behandlung des Linienintegrals der magnetischen Feldstärke im Rahmen der Maxwell'schen Theorie	211
LUDWIG, G.: Elektronische Lichtgeschwindigkeitsmessung mit Laser und Ultraschallzelle	496
v. MACKENSEN, M.: Methodische Prinzipien des naturwissenschaftlichen Unterrichts an Waldorfschulen	335

NEUSÜSS, W.: Experimente mit Digitalbausteinen . . .	92
PACENA, R.: Möglichkeiten des Einsatzes eines ohmschen Netzwerkes im Physikunterricht und im physikalischen Praktikum	234
PELKMANN, W.: Zeitablauf eines Satelliten ab nächstem Bahnpunkt als Funktion der exzentrischen Anomalie	439
RAHN, G. – SCHNEIDER, H.: Die sogenannte »Zeitfreie Gleichung« als notwendige und hinreichende Bedingung für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung	101
SCHNEIDER, H.: Ein Meßverfahren für Geschwindigkeitsänderungen bei Pendelstößen	29
SCHRAMM, H.: Informationsübertragung durch Zeichen. Ein Beispiel für ein lernzielorientiertes Unterrichtsprojekt	151
STEFFENS, E.: Ein Zweikanal-Vorsatz für Elektronenstrahloszilloskopen	426
WEITZEL, M.: Qualitativer Nachweis des Wienschen Verschiebungsgesetzes	30
WENINGER, J.: Gewicht soll ein Synonym für Masse werden	69
WERNER, A.: Neue Bestimmung der Gravitations-Rotverschiebung des Siriusbegleiters	243

Chemie

FLOIR, F.: Über den Nachweis der Photodissoziation des Chlorsäurestoffs	500
GOSSELCK, J. – AUEL, K. H.: Schülergruppenversuch zur Demonstration der unterschiedlichen Reaktionsfähigkeiten von Carbonsäurederivaten (S_n2 -Reaktionen)	39
JANSEN, W.: Zur experimentellen Einführung des Katalysatorbegriffs im Chemieunterricht	354
JANSEN, W. – KNEIPP, E.: Demonstrations- und Übungstafel zur Veranschaulichung des Aufbaus der Elektronenhülle der Atome.	105
JUST, E.: Zur Polarität von Flüssigkeiten	101
– Ein Hinweis auf die Hydratation von Salzen	164
KLEMMER, G.: Strukturorientierung im Chemieunterricht und chemische Strukturmodelle	267
LOCHMANN, G.: Ein Vorlesungsversuch (ohne Apparat) über eine auffällige Wirkung gelöster Luft in organischen Flüssigkeiten	357
NÖDING, S.: Modelle und Modelldenken im Chemieunterricht – Möglichkeiten und Grenzen	74
REISS, J.: Die Inhaltsstoffe von Haschisch und ihr dünnschicht-chromatographischer Nachweis	437
SCHMIDT, H.-J.: Moderner Chemieunterricht für die Sekundarstufe in England und Schottland	
Teil 1	399
Teil 2	465
SCHREIBER, G.: Ein Beispiel für die Behandlung einer Reaktion 2. Ordnung	434

SIERIG, G.: Probleme der Abfallbeseitigung unter besonderer Berücksichtigung der Abfallwiederverwendung	1
SKOTNICKY, J. – MOLNAR, F.: Verschiedenartige Ursachen bei der Energielieferung durch galvanische Elemente	340
STORK, H. – KÜHN, G.: Chemieunterricht im 5. und 6. Schuljahr nach dem Nuffield Chemistry Project	
Teil 1	133
Teil 2	193
ZANDER, H.: Die Behandlung des Massenwirkungsgesetzes im Wahlpflichtfach Chemie der Klasse 12	32

Biologie

BAUMANN, K.: Zum Begriff »Biologische Oxidation«	239
DUDEL, H.: Die Hydrolyse von Eiweiß und Nachweis der Aminosäuren durch Dünnschichtchromatographie	237
– Zur Chromatographie von Blutfarbstoffen	295
V. FALKENHAUSEN, E.: Wasserhaushalt und Wasseruntersuchung. Thema für den Biologieunterricht	41
FELDMANN, K.: Die Behandlung des Rauschdrogenproblems im Unterricht	170
FREYTAG, K.: Dokumentation mit der Sichtlochkartei	115
HÄFNER, P.: Transistorschaltung für Proportional- und Integralregelungen	50
– Impulsgeberschaltung für elektrophysiologische Versuche	506
HÄFNER, P. – UNGERER, O.: Atmung und Gärung, Alternativen des Zellstoffwechsels, im vergleichenden Schülerversuch	106
IVANKOVIC, S.: Ursachen und Verhütung von Lungenkrebs	4
LINDAUER, M.: Lernen und Gedächtnis – Neue Erkenntnisse über das Tierexperiment	412
NEUMANN, G.-H.: Über das Vorhandensein von »Wertvorstellungen« bei Papageien und Meerkatzen	165
PETERS, D. ST. – GUTMANN, W. FR.: Die Stichhaltigkeit des Homologiebegriffs	274
SCHRÖDER, H.: Die Verunreinigung der Luft als Problem des Umweltschutzes. Theoretische und praktische Bedeutung im Oberstufenunterricht des Gymnasiums	
Teil 1	44
Teil 2	108
SCHRÖDER, W.-D.: Zur unzureichenden Ausbildung von Biologielehrern im Bereich der Humanbiologie. Aspekte eines qualitativen Ausbildungsnotstandes	472
VERBAND DEUTSCHER BIOLOGEN, SCHULAUSSCHUSS: Rahmenplan des Verbandes Deutscher Biologen für das Schulfach Biologie	202
WALTER, W.: Speicheldrüsen-Chromosomen – experimentelle Untersuchung in Schülerübungen	359

WITTE, G. R.: Über die sozialen Funktionen einiger Froschlurchenstimmen und ihre unterrichtliche Erarbeitung	366	LINDNER, H.: Zehn Jahre Programmierte Instruktion	477
ZÖLLER, W. W.: Testähnliche Verfahren zur Ermittlung des Lehr- und Lernerfolges im Biologieunterricht	501	v. MACKENSEN, M.: Methodische Prinzipien des naturwissenschaftlichen Unterrichts an Waldorfschulen	335
Allgemeines		SCHLIER, CH.: Computer in die Schule – aber wie? .	321
BAURMANN, E.: Begrüßungsansprache auf der Festsetzung der Hauptversammlung des Fördervereins in Karlsruhe	257	SCHRAMM, H.: Informationsübertragung durch Zeichen. Ein Beispiel für ein lernzielorientiertes Unterrichtsprojekt	151
HARRIS, D. C.: Ein neues Modell der Lehrerbildung an der Universität London	77	STEINBUCH, K.: Auf dem Weg zu einer kybernetischen Anthropologie (Festvortrag auf der Hauptversammlung des Fördervereins in Karlsruhe).	260
KUHN, W.: Kopernikus – ein Revolutionär?	449	WAGENSCHNEIN, M.: Der Vorrang des Verstehens: Pädagogische Anmerkungen zum mathematisierenden Unterricht	385

MITTEILUNGEN

Kurzberichte

Begleitfächer des Studiums der Mathematik	50
Empfehlungen der DPG zur Neustrukturierung des Physikstudiums	118
Rahmenrichtlinien des Landes Hessen.	120
Schulfernsehen Mathematik	176
Mathematisch-Didaktisches Seminar an der Universität Freiburg	178
Archimedes. Blätter für mathematische Bildung	244
Bundeswettbewerb Mathematik 1972/73. 1. Runde	245
Stellungnahme zur Mengenlehre in der Schule (DVLMD)	374
Probensammlung zur Kunststoffkunde	374
Mathematischer Vorkurs an der TU Hannover	374
Zur Reform des Studiums der Technikwissenschaften	441
Bundeswettbewerb Mathematik 1972/73. 2. Runde	441
Curricula	507

Persönliches

BAURMANN, E.: Franz Mutscheller 70 Jahre	310
--	-----

Tagungen, Veranstaltungen

KÜNZLI, R.: Zur Neugestaltung des naturwissenschaftlichen Unterrichts in der Sekundarstufe I. Bericht über das IPN-Symposion: Integriertes Curriculum Naturwissenschaften der Sekundarstufe I	312
NOACK, H.: Bundeswettbewerb »Jugend forscht« 1973	310
SCHMIDT, H.-J.: Die Jahrestagung der Association for Science Education vom 2. bis 5. Januar 1973 in Birmingham	177
Tagungsankündigungen	119, 120, 244, 313, 374, 440

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V.

Einladung zur 64. MNU-Hauptversammlung in Karlsruhe vom 15. bis 19. April 1973	51
Vorstandssitzung in Karlsruhe, 21. und 22. Oktober 1972	51
Abbuchung des Beitrags.	52
Landesverband Schleswig-Holstein. Arbeitstagung »Der Kleincomputer im Mathematikunterricht«. Arbeitstagung für Mathematik und Physik in Kiel	52
Landesverband Hessen. Landesversammlung in Gießen	53
Bezirksgruppe Hannover. Arbeitsbericht	245
Bericht über die 64. Hauptversammlung von 15. bis 19. April 1973 in Karlsruhe	298
Geschäftssitzung auf der 64. Hauptversammlung in Karlsruhe am 18. April 1973	303
Kassenbericht 1972.	306
Vorläufige Stellungnahme zur Frage der fachdidaktischen Ausbildung der Lehrer für Mathematik, Physik, Chemie und Biologie in der Sekundarstufe II	307
MNU-Auskunftsdienst	309, 373
65. Hauptversammlung Ostern 1974 in Kiel	309, 373
Landesverband Schleswig-Holstein	309
5. Fachleitertagung für Biologie	373

BESPRECHUNGEN

Zeitschriften

BERCK, K. H.: Biologie	
Mai bis Oktober 1972	54
November 1972 bis April 1973	313
BRUHN, J.: Physik	
Juli bis Dezember 1972	179
Januar bis Juni 1973	441
DÜLL, O.: Chemie	
Oktober 1972 bis März 1973.	246
April bis September 1973	508
NOACK, H.: Mathematik	
Juli bis Dezember 1972	120
Januar bis Juni 1973	375

Geräte

Chemie-Schablone »Laborgeräte«	512
Foliothek phys 1. Arbeitstransparente	255
Orbit-Molekülbaukasten für organische und anorganische Chemie	63
Rechenstab für Chemiker	512
SERAL-Ionenaustauscher Seradest S 550 und S 1100	64

Bücher

Mathematik

ARISTO-WERKE (Hrsg.): Mitteilungen für die Schulpraxis. Heft 35.	382
ATHEN, H. – GRIESEL, H. (Hrsg.): Mathematik heute. 5. u. 6. Schuljahr	382
BONSDORFF, E. – FABEL, K. – RÜHIMA, O.: Schach und Zahl. 2. Aufl.	184
BOURBAKI, N.: Elemente der Mathematikgeschichte	446
BOYCE, W. E. – DIPRIMA, R. C.: Introduction to Differential Equations	186
BRAUCH, W. – DREYER, H.-J. – HAACKE, W.: Mathematik für Ingenieure (des Maschinenbaus und der Elektrotechnik). 3. Aufl.	59
BRENNER, J. – LESKY, P. – VOGEL, A.: Grundlagen einer strukturell betonten Schulmathematik	319
CONSTAM, M.: Fortran für Anfänger	319
COX, D. R.: Analysis of Binary Data	59
DENIS-PAPIN, M. – CULLMANN, G.: Übungsaufgaben zur Informationstheorie	187
DUDLEY, I.: Elementary Number Theory	318
EFFIMOW, N. W.: Höhere Geometrie I, II	319
EHRIG, H. – PFENDER, M.: Kategorien und Automaten.	186
EULENBERG, M. D. – SUNKO, TH. S. – JAMES, H. J.: Intermediate Algebra: A College Approach	251

FENICHEL, R. – WEIZENBAUM, J.: (Hrsg.): Computers and Computation. Readings from Scientific American	185
FRIEDLAND, A. J.: Puzzles in Math & Logic. 100 New Recreations	250
GARDNER, M.: Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American	186
GÉCSEC, F. – PEÁK, I.: Algebraic Theory of Automata	251
GOERING, H.: Elementare Methoden zur Lösung von Differentialgleichungsproblemen	59
GRISWOLD, R. E.: The Macro Implementation of SNOBOL 4	382
GROSSE, D. W.: Programmieren mit ALGOL. Eine Einführung	59
HAACK, W.: Darstellende Geometrie. Bd. I, II. 7. bzw. 6. Aufl.	185
HASELOFF, O. W. – HOFFMANN, H.-J.: Kleines Lehrbuch der Statistik. 4. Aufl.	59
HEINRICH, W. – STUCKY, W.: Programmierung mit ALGOL	58
HIGMAN, B.: Programmiersprachen	188
HOTZ, G.: Informatik. Rechenanlagen	251
JANTSCHER, L.: Distributionen	381
JEHLE, F.: Boolesche Algebra	60
KOVÁCS, M.: Rechenautomaten und logische Spiele	187
KOWALSKY, H. J.: Einführung in die lineare Algebra. – Lineare Algebra	60
.	250
KUNTZMANN, J.: Unendliche Reihen	184
LAYTON, W. I.: College Arithmetic. 2. Aufl.	251
LIENERT, G. A. – HOFER, M.: Mathematiktest für Abiturienten und Studienanfänger	250
LIERMANN, H.: Verbandsstrukturen im Mathematikunterricht.	186
LITTLEWOOD, D. E.: A University Algebra. An Introduction to Classic and Modern Algebra	382
MACLANE, S.: Kategorien	60
MARJORAN, D. T. E.: Aufgaben zur Modernen Mathematik.	445
MATTHEWS, G. (Hrsg.): Mathematics through School	382
MATTHEWS, W. H.: Mazes & Labyrinths. Their History & Development	185
MESCHKOWSKI, H. (Hrsg.): Grundlagen der modernen Mathematik	58
– Meyers Handbuch über die Mathematik. 2. Aufl.	187
MITSCHKA, A.: Das Rechnen mit Verhältnissen. Ein Weg zur Mathematisierung des Rechenunterrichts in der Hauptschule.	58
MOON, P.: The Abacus	250
MUCKE, H.: Anaglyphen – Raumzeichnungen. Eine Anleitung zum Konstruieren von Raumbildern.	187

NEUBERT, K. – NORDMEIER, G.: Mathematik für die Hauptschule 7. Schuljahr	382	KLEIN, K.: Digitale Elektronik. Ein Lehr- und Übungsbuch zum LOGITRON-Gerät	188
OBERSCHHELP, A.: Aufbau des Zahlensystems. 2. Aufl.	250	KLEIN, P.: Leitfaden der elektronischen Meßgrößen- erfassung	126
PETERSEN, J. A. – HASHISAKI, R. A.: Theory of Arith- metic. 3. Aufl.	251	KLING, P.: Physik-Versuche für arbeitsteiligen Grup- penunterricht. Sekundarstufe II	127
SACHS, H.: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen	185	LEUTE, R.: Grundwissen Physik A/B	61
SCHUPP, H.: Geometrie in der Sekundarstufe I . . .	318	LÜSCHER, E. – JODL, H. (Hrsg.): Physik – Gestern. Heute. Morgen	127
SCHWARZENBERGER, R. L. E.: Elementary Differen- tial Equations	381	MARXEN, A.: Elektrische Musikinstrumente	251
SMIRNOW, V. I.: Linear Algebra and Group Theory .	382	MJAKISCHEW, G. J.: Was sind Elementarteilchen? .	251
TRAEGER, W. – UNGER, K. H. – MEYER, H. G. – VOG- LER, H.: Mathematisches Arbeitsbuch für das 7. Schuljahr	382	MÜLLER, E.: Sonne, Mond und Sterne über dem Reich der Inka	189
VETTIGER, F.: Algorithmen und Rechenautomaten im Unterricht	185	NIKOL, F. – LANG, D.: Physik II. Beispiele und Auf- gaben	188
WACHSMANN, T.: Schülerbuch zum Computer . . .	445	RENTSCHLER, W.: Physik für Naturwissenschaftler. Bd. I, II	127
WEIGHT, H. N.: First Course in Theory of Numbers .	382	RICHTER, ST.: Technikgeschichte in Einzeldarstel- lungen. Nr. 23	127
WEYH, U.: Elemente der Schaltungs algebra. 5. Aufl.	188	RUNKEL, H. – HOFFMANN, W.: Physik. Teil 1	60
– Aufgaben zur Schaltungs algebra	59	SABROWSKY, L.: Integrierte NF-Elektronik	61
WHIPKEY, K. L. – WHIPKEY, M. N.: The Power of Calculus	381	SCHULZ, W.: Das kleine Video-Praktikum. VCR ver- stehen – installieren – warten	61
WIGAND, K.: Mathematik-Arbeitsblätter für Gymna- sien, Klassen 5 und 6	186	SCHURZ, J.: Warum quillt die Kirsche? Alltagsproble- me zwischen Physik und Chemie	61
WILLERDING, M. F. – HAYWANG, R. A.: Mathematics – The Alphabet of Science. 2. Aufl.	251	SKUDRZYK, E.: The Foundations of Acoustics	189
WILLERDING, M. F. – HOFFMANN, ST.: College Alge- bra and Trigonometry	251	SPRECKELSEN, K.: Veränderungen und Erhaltung. 2. Teilbd. f. d. 2. Grundschuljahr	189
WILSON, L. L. – NEW, B. D.: Trigonometry	251	SUTANER, H.: Das Spulenbuch (Hochfrequenzspulen)	61
WIRTH, N.: Systematisches Programmieren	446	v. WEIZSÄCKER, C. FR.: Voraussetzungen des natur- wissenschaftlichen Denkens	127

Physik

BENDA, D.: Halbleiter-Schaltungstechnik einfach dar- gestellt	61
BERGMANN, L. – SCHAEFER, CL.: Lehrbuch der Expe- rimentalphysik. Bd. II, III. 6. bzw. 5. Aufl. . . .	61
BERGMANN, F. – SCHELPER, W.: Einführung in die Physik. Sekundarstufe I, I	61
BIALAS, V. – GERLACH, W. – LIST, M. – TREUE, W.: Johannes Kepler zur 400. Wiederkehr seines Ge- burtstages	189
CARMAN, R. A.: Zahlen und Einheiten der Physik .	251
CIBA, W.: Radiotechnik selbst erlebt	189
EICHMEIER, J.: Elektrotechnik für Studienanfänger .	61
FEUERLEIN, R.: Die Gravitation	60
HILPERT, H.: Halbleiterbauelemente	189
JACOBS, W. – BECKER, F. W.: Physik – Chemie 1. Lern- und Arbeitsbuch für das 5./6. Schuljahr	126
JAWORSKI, B. M. – DETLAF, A. A.: Physik griffbereit. Definitionen – Gesetze – Theorien	189

Chemie

BAUMGÄRTEL, E. – LEHMANN, R. – LICHTNER, E.: Grundlagen der Allgemeinen Chemie für Hoch- schulingenieure und Pädagogen	189
BEYERMANN, D.: Nucleinsäuren	253
CHRISTEN, H. R.: Atommodelle, Periodensystem, Che- mische Bindung	62
v. CUBE, A. – FÜRST, L. – MÜLLER, W.: Elemente aus der Retorte	252
GLÄSER, M.: Was ist Radiographie? Radiographische und autoradiographische Experimente	252
GUTMANN, V. – HENGGE, E.: Allgemeine und anor- ganische Chemie	252

HEYNS, K.: Allgemeine Organische Chemie	190
KNOKE, S. – SIMON, G.: Chemie in einfachen Versu- chen	62
KÜSTER – THIEL – FISCHBECK: Logarithmische Re- chentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. 101. Aufl.	511
REUBER, R. – WELLENS, H. – GRUSS, K.: Chemikon. Chemie in Übersichten. Teile I, II, V, VI	252

Biologie

BAUCHHENNSS, E.: Carausius morosus BR, Stabheu- schrecke. – Großes Zoologisches Praktikum Bd 14c	62
BITTNER, E.: Blaualgen (Cyanophyceen)	383
CARLSON, E. (Hrsg.): Gentheorie. Grundlagen der modernen Genetik Bd. 7	253
ČÍŽEK, F. – HODÁNOVÁ, D.: Evolution als Selbstregu- lation	190
CREMER, H. D. (Hrsg.): Grundfragen der Ernäh- rungswissenschaft	191
DYLLA, K. – KRÄTZNER, G.: Das biologische Gleich- gewicht	254
FELIX, J. – TOMAN, J. – HISEK, K.: Der Große Natur- führer. Unsere Tier- und Pflanzenwelt	254
FRAAS, E.: Der Petrefakten-sammler. Ein Leitfaden zum Bestimmen von Versteinerungen	383
FRANZ, J. M. – KRIEG, A.: Biologische Schädlings- bekämpfung	190
v. FRISCH, K.: Ausgewählte Vorträge 1911–1969 . .	190
GARCKE, A.: Illustrierte Flora. Deutschland und an- grenzende Gebiete. 23. Aufl.	383
GRUPE, H.: Biologie-Didaktik	254
HARTMANN, PH. E. – SUSKIND, S. R.: Die Wirkungs- weise der Gene. Grundlagen der modernen Gene- tik Bd. 5	255
HEBERER, G.: Der Ursprung des Menschen. Unser gegenwärtiger Wissensstand. 3. Aufl.	253
HEINZEL, H. – FITTER, R. – PARSLow, J.: Pareys Vogelbuch. Alle Vögel Europas, Nordafrikas und des mittleren Ostens	447
HERDER VERLAG (Hrsg.): Herder Lexikon Biologie .	382
HESS, H.: Fahrplan der Gene – Erbfaktoren steuern die Entwicklung	447
HOFNER, A. – ALTNER, G.: Die Sonderstellung des Menschen.	191
KANDELER, R.: Entwicklungsphysiologie der Pflanzen	383
KNAPP, R.: Einführung in die Pflanzensoziologie . .	62

LEHMANN, R.: Kleine Flechtenkunde	255
MARLER, P. – HAMILTON, W. J.: Tierisches Verhalten	384
MERGENTHALER, W.: Der Mensch. Biologische Skiz- zenblätter Teil II: Stoffwechsel.	446
MEYER, M.: Molekularbiologie	254
MÜLLER, J. – MELCHINGER, H.: Virus und Krebs. Virustumoren – Tumurviren	253
NÖCKER, J.: Physiologie der Leibesübungen. 2. Aufl..	447
PRADL, W. D.: Blaberus giganteus, Schaben. Präpara- tionsanleitung. Großes Zoologisches Praktikum Bd. 14b.	191
SCHAEFER, G.: Kybernetik und Biologie	254
SCHWIDETZKY, I.: Hauptprobleme der Anthropologie. Bevölkerungsbiologie und Evolution des Menschen	191
SEIFERT, G.: Entomologisches Praktikum	254
STICHMANN, W.: Biologie. Didaktik. Schriften für den Unterricht an der Grund- und Hauptschule . . .	191
STOKES, A. W.: Praktikum der Verhaltensforschung .	382
VAN DEN BRINK, F. H.: Die Säugetiere Europas, west- lich des 30. Längengrades	446
VOGT, H.-H.: Lernen bei Tier und Mensch	382

Allgemeines

BIGALKE, H.-G.: Studienseminar und Lehrerausbil- dung	447
EIGLER, G.: Auf dem Wege zu einer Audiovisuellen Schule	128
EKRUTT, W.: Der Kalender im Wandel der Zeiten. 5000 Jahre Zeitrechnung	320
GOUDSMIT, S. A. – CLAIBORNE, R.: Die Zeit	192
HERDER VERLAG (Hrsg.): Herder Lexikon Geographie	320
v. MÜNCH, W.: Bildungspolitik im technischen Zeit- alter	191
PIAGET, J.: Die Entwicklung des Erkennens I. Das mathematische Denken	255
SCHRÖDER, H.: Lerntheorie und Programmierung. Lerntheoretische Grundlagen der programmierten Unterweisung	448
VERHÜLSDONK, E.: Logenplatz im Universum . . .	63
v. WASIELEWSKI, E.: Einfache Netzplantechnik . . .	63
WILHELMY, H.: Kartographie in Stichworten. – Bd. I: Kartenprojektion. Bd. II: Karteninhalt und Kar- tenwerke. Bd. III: Thematische Kartographie. 2. Aufl.	447
ZIMMERMANN, H.-J.: Netzplantechnik	63

Abhandlungen

Kategorien, Funktoren, natürliche Transformationen¹⁾

Von RUDOLF FRITSCH

Es muß vorausgeschickt werden, daß hier keine didaktischen oder methodischen Fragen zum Mathematikunterricht in der Schule behandelt werden. Dieses Referat hat vielmehr das Ziel, einige neuere Begriffe zu erläutern, die heute zum Wortschatz jedes Mathematikstudenten gehören und in Zukunft vielleicht die Mengensprechweise für die Grundlegung der Mathematik ablösen werden. Obwohl sich ein direkter Einfluß dieser Entwicklung auf den Schulunterricht erst in einiger Zeit ergeben wird, erscheint mir ein Wissen darum schon jetzt bei der sachlichen Vorbereitung des Unterrichts notwendig.

Die Aufgaben, die einem Mathematiker gestellt werden, bestehen z. T. darin, konkrete Probleme von unwesentlichem Ballast zu befreien und dahinterliegende Sachverhalte zu erkennen; Sachverhalte, die oft gleich sind, auch wenn die ursprünglichen Probleme sehr verschieden ausgesehen haben. So kommt man z. B. auf die Begriffe Menge, Gruppe, Körper, Vektorraum, metrischer Raum und die entsprechenden Theorien (Mengenlehre, Gruppentheorie usw.). Dabei handelt es sich, wie es P. J. HILTON [3] einmal ausgedrückt hat, um eine Abstraktion 1. Stufe.

Innerhalb der Mathematik lassen sich solche Aufgaben wiederfinden. Man beobachtet, daß die Methoden, die bei der Behandlung verschiedener Theorien angewandt werden, oft einander sehr ähnlich sind. Indem man das Gemeinsame herauschält und dessen Struktur betrachtet, gelangt man zu einer Abstraktion 2. Stufe, als deren Grundbegriffe heute »Kategorie«, »Funktor« und »natürliche Transformation« angesehen werden. Aussagen der Mengenlehre sind Sätze über die Kategorie der Mengen; entsprechend hat man die Kategorie der Gruppen, die Kategorie der Vektorräume usw. Um Sätze über Gruppen zu beweisen, wendet man mengentheoretische Schlüsse an; beim Arbeiten mit Vektorräumen kommt man oft auf Fragen aus der Gruppentheorie. Man erhält so Übergänge zwischen Kategorien, das sind »Funktoren«. Schließlich hat man Funktoren miteinander zu vergleichen,

das führt auf den Begriff der »natürlichen Transformation«.

Wie die Mengenlehre zerfällt auch die Theorie der Kategorien in zwei Teile; einmal liefert sie Rüstzeug für jeden Mathematiker, zum zweiten ist sie ein Forschungsgebiet für Spezialisten. Eine Zusammenstellung der Grundlagen von allgemeiner Bedeutung findet man in [2] oder [5], speziell als Einführung für die Fachlehrer an Gymnasien gedacht ist ein Aufsatz von P. J. HILTON [3].

Die Entwicklung der Theorie der Kategorien begann mit der 1942 geschriebenen, aber erst 1945 gedruckten Arbeit von SAMUEL EILENBERG und SAUNDERS MAC LANE [1], die eine der immer noch besten Motivationen für die ganze Theorie enthält. EILENBERG und MACLANE gehen von folgendem Beispiel aus:

Man kann auf der Menge der linearen Abbildungen $f: V \rightarrow R$ (V reeller Vektorraum, R Körper der reellen Zahlen, aufgefaßt als 1-dimensionaler reeller Vektorraum) eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren so erklären, daß wieder ein Vektorraum entsteht, der sogenannte duale Vektorraum zu V , für den sich die Bezeichnung V^* eingebürgert hat.

Wiederholung des Verfahrens liefert den »zweifach dualen Vektorraum« V^{**} . Darüber hinaus induziert jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*$, die gegeben ist durch

$$(\lambda: W \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto (\lambda \circ f: V \rightarrow \mathbb{R}) \quad (1)$$

und sich als linear erweist; damit erhält man auch eine lineare Abbildung $f^{**}: V^{**} \rightarrow W^{**}$. Mit diesen Festsetzungen gilt:

Satz 1. Zu jedem reellen Vektorraum V gibt es eine (feste) lineare Abbildung $i(V): V \rightarrow V^{**}$, derart daß für alle linearen Abbildungen $f: V \rightarrow W$ gilt:

$$f^{**} \circ i(V) = i(W) \circ f. \quad (2)$$

(Den zweiten Teil dieses Satzes gibt man zur Zeit oft in einer anderen Form an, die man für einprägsamer hält, nämlich:

¹⁾ Vortrag auf der Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts 1972 in Köln.

..., derart daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i(V)} & V^{**} \\ f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f^{**} \\ W & \xrightarrow{i(W)} & W^{**} \end{array} \quad (3)$$

für alle linearen Abbildungen $f: V \rightarrow W$ kommutativ ist, oder kürzer:

..., derart daß für alle linearen Abbildungen $f: V \rightarrow W$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i(V)} & V^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ W & \xrightarrow{i(W)} & W^{**} \end{array} \quad (3')$$

(Die Abbildungen $i(V)$ sind injektiv; im Falle endlichdimensionaler Vektorräume handelt es sich sogar um Isomorphismen. Auf dieser Tatsache beruht das Wort »equivalence« im Titel von [1].

Bei dem Versuch, das Naturphänomen der Existenz der »universellen« Abbildungen $i(V)$ richtig zu verstehen, erfanden EILENBERG und MACLANE zunächst die »natürlichen Transformationen«.

(Die Zuordnung $V \mapsto i(V)$ bildet eine natürliche Transformation.) Um diesen Begriff richtig zu fassen, brauchten sie Funktoren (die Zuordnungen $V \mapsto V^{**}$ und $f \mapsto f^{**}$ definieren einen Funktor), und um schließlich sagen zu können, was ein Funktor ist, wurden Kategorien eingeführt (die reellen Vektorräume zusammen mit den linearen Abbildungen bilden die »Kategorie der reellen Vektorräume«).

Aussagen ähnlicher Art kommen an vielen Stellen der Mathematik vor und haben große Bedeutung. Ein Charakteristikum dabei ist, daß man gar nicht von den Elementen der betrachteten Objekte sprechen muß, sondern es nur auf die Abbildungen, die Morphismen der Kategorie ankommt. Das sei noch an einem anderen Beispiel gezeigt; es ergibt sich aus dem folgenden

Satz 2. Zu jeder Gruppe G gibt es eine (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) kommutative Gruppe $Ab(G)$ und einen Epimorphismus $k(G): G \rightarrow Ab(G)$, derart daß zu jedem Homomorphismus $g: G \rightarrow A$ von G in eine abelsche Gruppe A genau ein Homomorphismus $g': Ab(G) \rightarrow A$ mit

$$g' \circ k(G) = g \quad (4)$$

existiert.

(Diese Gleichung veranschaulicht man sich wieder durch das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{k(G)} & Ab(G) \\ & g \searrow & \downarrow g' \\ & & A \end{array} \quad (5)$$

Dieser Satz liefert:

1. zu jedem Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow H$ ein Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{k(G)} & Ab(G) \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ H & \xrightarrow{k(H)} & Ab(H) \end{array} \quad (6)$$

und

2. da $k(H) \circ f$ ein Homomorphismus von G in eine kommutative Gruppe ist, genau einen Homomorphismus $Ab(f): Ab(G) \rightarrow Ab(H)$, derart daß gilt:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{k(G)} & Ab(G) \\ f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow Ab(f) \\ H & \xrightarrow{k(H)} & Ab(H) \end{array} \quad (7)$$

Hier bildet nun die Zuordnung $G \mapsto k(G)$ eine natürliche Transformation; die Zuordnungen $G \mapsto Ab(G)$, $f \mapsto Ab(f)$ definieren einen Funktor, und man arbeitet mit der Kategorie der Gruppen bzw. mit einer Unterkategorie davon, der Kategorie der kommutativen Gruppen.

Nun sollte es möglich sein, die exakten Definitionen zu verstehen.

Definition 1. Eine KATEGORIE \mathfrak{K} besteht aus

- a) einer Klasse $|\mathfrak{K}|$ von Objekten
(Objekte werden üblicherweise durch große lateinische Buchstaben A, B, C, \dots bezeichnet),
- b) einer Klasse \mathfrak{K}° von Morphismen
(Morphismen werden üblicherweise durch kleine lateinische Buchstaben f, g, h, \dots bezeichnet),
- c) zwei Abbildungen
 $Q: \mathfrak{K}^\circ \rightarrow |\mathfrak{K}|$ (Quelle Definitionsbereich)
 $Z: \mathfrak{K}^\circ \rightarrow |\mathfrak{K}|$ (Ziel, Wertebereich)

(Man schreibt $f: A \rightarrow B$ oder $A \xrightarrow{f} B$ um auszudrücken, daß $f \in \mathfrak{K}^\circ$ mit $Q(f) = A$ und $Z(f) = B$ ist, und sagt in einem solchen Fall: » f ist ein Morphismus von A nach B «),

- d) einer Abbildung
 $Id: |\mathfrak{K}| \rightarrow \mathfrak{K}^\circ$ (Identität)

und

e) einer Abbildung

$$\circ: \{(f, g) \mid f, g \in \mathfrak{S}^\circ, Q(g) = Z(f)\} \rightarrow \mathfrak{S}^\circ$$

(Komposition)

(Man schreibt $g \circ f$ statt $\circ(f, g)$; $g \circ f$ wird gelesen »g nach f«),

derart daß gilt:

$$Q(Id(A)) = A = Z(Id(A)) \quad (8)$$

für alle $A \in |\mathfrak{S}|$

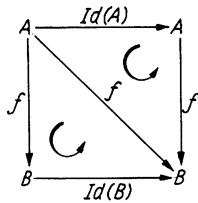
(d. h.

$$Id(A): A \rightarrow A), \quad (8')$$

$$Id(B) \circ f = f = f \cdot Id(A) \quad (9)$$

für alle $A, B \in |\mathfrak{S}|$ und $f: A \rightarrow B$

(d. h.



$$Q(g \circ f) = Q(f) \quad (10)$$

und

$$Z(g \circ f) = Z(g) \quad (11)$$

für alle $f, g \in \mathfrak{S}^\circ$ mit $Q(g) = Z(f)$

(d. h.

$$g \circ f: A \rightarrow C \quad (10-11)$$

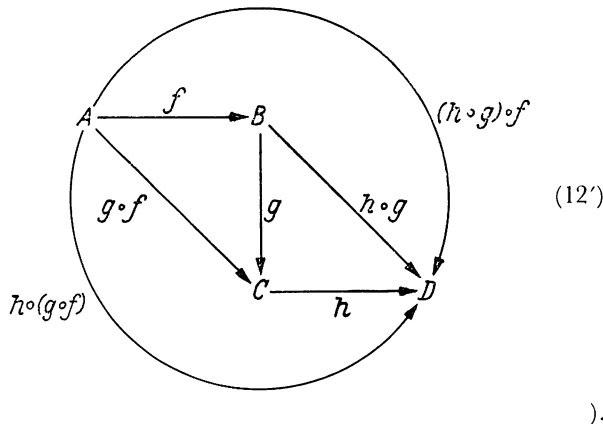
für $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$),

sowie

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (12)$$

(Assoziativität) für alle $f, g, h \in \mathfrak{S}^\circ$ mit $Q(h) = Z(g)$ und $Q(g) = Z(f)$

(anschaulich:



Im ersten Beispiel waren die Objekte die reellen Vektorräume, die Morphismen die linearen Abbil-

dungen und \circ die Hintereinanderausführung. Im zweiten Beispiel ging es um zwei Kategorien, einmal um die Kategorie $\mathfrak{G}\mathfrak{R}$ der Gruppen, mit den Gruppen als Objekten und den Homomorphismen als Morphismen, zum zweiten um die Kategorie $\mathfrak{K}\mathfrak{G}$ der kommutativen Gruppen; deren Objekte sind eben die kommutativen Gruppen und als Morphismen nimmt man alle Homomorphismen zwischen solchen.

Weitere Beispiele bilden die Kategorie $\mathfrak{M}\mathfrak{G}$ der Mengen mit den Mengen als Objekten und den Mengenabbildungen als Morphismen²⁾, die Kategorie $\mathfrak{S}\mathfrak{V}$ der Vektorräume über einem Schiefkörper K mit den K -linearen Abbildungen als Morphismen und die Kategorie $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ der metrischen Räume mit den stetigen Abbildungen; zu der letzteren gehören z. B. auch die stetigen Funktionen.

Schließlich sei noch eine oft verwendete Kategorie \mathfrak{S} angegeben, deren Definition nicht so auf der Hand liegt. Dazu geht man von einem beliebigen Ring R mit Einselement aus und setzt:

$$|\mathfrak{S}| := \mathbb{N} \quad (13)$$

(\mathbb{N} bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen)

$$\mathfrak{S}^\circ := \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} R(m, n) \quad (14)$$

($R(m, n)$ bezeichnet die Menge der m -zeiligen, n -spaltigen Matrizen über R)

$$Q(a_{ij}) := \text{Spaltenzahl von } (a_{ij}) \quad (15)$$

$$Z(a_{ij}) := \text{Zeilenzahl von } (a_{ij}) \quad (16)$$

für alle $(a_{ij}) \in \mathfrak{S}^\circ$

$$Id(m) := (\delta_{ij}) \quad (17)$$

(dabei gilt:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (18)$$

$$\circ((b_{ij}), (a_{ij})) := (a_{ij}) \times (b_{ij}) = (\sum_j a_{ij} b_{ij}) \quad (19)$$

(\times bezeichnet das Matrizenprodukt).

Als Nächstes soll der Begriff des Funktors präzisiert werden. Dazu geht man von zwei vorgegebenen Kategorien \mathfrak{S} und \mathfrak{Z} aus.

Definition 2. Ein FUNKTOR $\tilde{f}: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{Z}$ (man liest: »von \mathfrak{S} nach \mathfrak{Z} «) besteht aus

a) einer Abbildung $|\tilde{f}|: |\mathfrak{S}| \rightarrow |\mathfrak{Z}|$

(man setzt zur Abkürzung

$$FA := |\tilde{f}|(A) \quad (20)$$

für alle $A \in |\mathfrak{S}|$)

und

²⁾ Hieran zeigt sich deutlich warum in der Definition der Begriff Klasse verwendet werden muß: $|\mathfrak{M}\mathfrak{G}|$ ist die »Klasse aller Mengen«, aber nicht die mit Vorsicht zu genießende »Menge aller Mengen«.

b) einer Abbildung $\tilde{f}: \mathfrak{N}^\circ \rightarrow \mathfrak{L}^\circ$

(man setzt wiederum zur Abkürzung

$$Ff := \tilde{f}^\circ(f) \quad (21)$$

für alle $f \in \mathfrak{N}^\circ$),

derart daß gilt:

$$Ff: FA \rightarrow FB \quad (22)$$

für alle $A, B \in |\mathfrak{N}|$ und $f: A \rightarrow B$ in \mathfrak{N}°

$$FId(A) = Id(FA) \quad (23)$$

für alle $A \in |\mathfrak{N}|$ und

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff \quad (24)$$

für alle $f, g \in \mathfrak{N}^\circ$ mit $Qg = Zf$

(anschaulich:

$$\begin{array}{ccc} & FB & \\ Ff \nearrow & & \searrow Fg \\ FA & \xrightarrow{F(g \circ f)} & FC \end{array} \quad (25)$$

Bisher traten folgende Funktoren auf:

$** : \mathfrak{N}\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{N}\mathfrak{B}$	die zweifache Bildung des dualen Vektorraums
$\mathfrak{U}\mathfrak{b} : \mathfrak{U}\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{U}\mathfrak{U}$	das »Abelschmachen«
$\mathfrak{U} : \mathfrak{U}\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}\mathfrak{N}$	die Einbettung von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{U}\mathfrak{N}$ als Teilkategorie
$\mathfrak{U} \circ \mathfrak{U}\mathfrak{b} : \mathfrak{U}\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{U}\mathfrak{N}$	die Hintereinanderausführung von $\mathfrak{U}\mathfrak{b}$ und \mathfrak{U}
$\mathfrak{I}\mathfrak{N} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$	die Identität der Kategorie \mathfrak{N} , hier sind $ \mathfrak{I}\mathfrak{N} $ und $\mathfrak{I}\mathfrak{N}^\circ$ die Abbildungen, die jedes Objekt und jeden Morphismus sich selbst zuordnen.

Weitere, oft gebrauchte Funktoren sind die sogenannten »Vergißfunktoren«, z. B. $\mathfrak{B} : \mathfrak{N}\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{U}$, der jedem K -Vektorraum die Menge seiner Vektoren zuordnet, also die Addition und die Multiplikation mit Skalaren »vergißt«, und entsprechend eine K -lineare Abbildung in die »unterliegende« Mengenabbildung überführt.

Nun seien Kategorien \mathfrak{N} und \mathfrak{L} , sowie Funktoren $\tilde{f}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{U}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{L}$ gegeben.

Definition 3. Eine NATÜRLICHE TRANSFORMATION $t: \tilde{f} \rightarrow \mathfrak{U}$ besteht aus einer Abbildung $t: |\mathfrak{N}| \rightarrow \mathfrak{L}^\circ$, derart daß gilt:

$$t(A): FA \rightarrow GA \quad (26)$$

und

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{t(A)} & GA \\ Ff \downarrow & \curvearrowright & \downarrow Gf \\ FB & \xrightarrow{t(B)} & GB \end{array} \quad (27)$$

für alle $A, B \in |\mathfrak{N}|$ und $f: A \rightarrow B$ in \mathfrak{N}° .

Satz 1 behauptet nun nichts anderes als die Existenz einer natürlichen Transformation $i: \mathfrak{I}\mathfrak{N}\mathfrak{B} \rightarrow **$ (vgl. (3) und (27)); Satz 2 impliziert die natürliche Transformation $\mathfrak{f}: \mathfrak{I}\mathfrak{U}\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{U} \circ \mathfrak{U}\mathfrak{b}$ (vgl. (7) und (27)). Es gibt noch viele weitere Beispiele, auf die hier leider nicht mehr eingegangen werden kann.

Die auf diesen Begriffen aufbauende Theorie der Kategorien und Funktoren wurde seit der Arbeit von EILENBERG und MACLANE kräftig entwickelt und hat sich weithin als sehr fruchtbar erwiesen. Begünstigt wurde diese Entwicklung dadurch, daß sich die Einstellung vieler Mathematiker zu der Frage, worauf es in der Mathematik wirklich ankommt, in den letzten Jahrzehnten geändert hat. Am Beginn dieses Prozesses galt das berühmte HILBERT-Wort »Niemand soll uns aus dem Paradies der Mengenlehre, das Cantor geschaffen hat, vertreiben können« ziemlich unangefochten. Seitdem hat sich jedoch mehr und mehr die Ansicht durchgesetzt, daß wirklich wichtige Eigenschaften mathematischer Objekte sich eher mit Hilfe ihrer abstrakten Struktur ausdrücken lassen, d. h. mit Hilfe von Morphismen einer Kategorie, als mit Hilfe der Elemente, aus denen man sich die Objekte zusammengesetzt denkt. Diese Einstellung hat auch Untersuchungen veranlaßt, die das Ziel haben, die Mengenlehre in der Grundlegung der Mathematik durch eine geeignete Theorie der Kategorien und Funktoren abzulösen. Zu erwähnen ist hier vor allem die Arbeit von F. W. LAWVERE [4]. Diese Überlegungen sind natürlich noch nicht abgeschlossen und werden auch noch einige Zeit in Anspruch nehmen. Es ist ja nicht einmal sicher, ob sie überhaupt erfolgreich zum Ende gebracht werden können. Aber im Hinblick darauf erscheint es doch lohnend, sich mit der ganzen Theorie schon jetzt vertraut zu machen.

Literatur

- [1] S. EILENBERG – S. MACLANE: General Theory of Natural Equivalences. – Transactions of the American Mathematical Society, Band 58 (1956). S. 231 bis 294.
- [2] H. B. BRINKMANN – D. PUPPE: Kategorien und Funktoren. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966.
- [3] P. HILTON: Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen. – Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, Band 17 (1970), S. 1–12.
- [4] F. W. LAWVERE: The Category of Categories as a Foundation for Mathematics. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965, S. 1–20. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966.
- [5] H. SCHUBERT: Kategorien I. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1970.

Anschrift des Verfassers:

775 Konstanz, Werner-Sombart-Str. 26